Def Supposons dim $V = n$. Un drapeau maximal invariant par A est une chaîne de $n+1$ sous-espaces invariants emboîtés

$$\underset{\{0\}}{W_0} \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \underset{V}{W_n}$$

avec $\dim(W_i) = i$, $\forall i = 1, \dots, n$

Pro A est triangulable $\Leftrightarrow$ $\exists$ drapeau maximal invariant par A

DEMO ($\Rightarrow$) Soit $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base tq

$$[A]_{E,E} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors $\{0\} \subsetneq \langle e_1 \rangle \subsetneq \langle e_1, e_2 \rangle \subsetneq \cdots \subseteq \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ est un drapeau max. invariant par A.

($\Leftarrow$) Soit $W_0 \subsetneq \cdots \subsetneq W_n$ un drapeau max. invariant.

Prenons $e_i \in W_i \setminus W_{i-1}$ pour chaque $i = 1, \dots, n$.

Alors $\left.\begin{array}{l} W_1 = \langle e_1 \rangle \\ \vdots \\ W_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle \end{array}\right\}$ et $[A]_{E,E} = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}$

Théorème $A \in \mathrm{End}(V)$ est triangulable $\Leftrightarrow$ $P_A(\lambda)$ est factorisable en un produit de polynômes de $\deg = 1$, à coeff. dans $\mathbb{K}$

$\Leftrightarrow$ $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tq $P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$

DEMO voir syllabus et comprendre

CH10 - FORME NORMAL DE JORDAN

Dans ce chapitre : $\mathbb{K}$ sera un corps commutatif

V un esp. vect sur $\mathbb{K}$, de dimension fini n et

$A \in \mathrm{End}(V)$ un opér. $A : V \to V$ linéaire.

- Rappel :

① A est triangulable $\Leftrightarrow$ $\exists$ base E tq $[A]_{E,E} = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $\det(A - xI) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) \cdots (\lambda_n - x)$

② Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors A est toujours triangulable

- But : Montrer que si A est Δ, $\exists$ base F tq

$$[A]_{F,F} = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

blocs de Jordan

10.1 POLYNOME MINIMAL D'UN OPERATEUR

10.1.1 Pourquoi ?

Ex : Soit $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une rotation de $\pi/2$

Prenons $v \in \mathbb{R}^3$ et calculons

$v, A(v), A^2(v), \ldots \to$ Quelle valeur possible pour

$\dim \langle v, A(v), A^2(v), \ldots \rangle$?

⊙ Cas général

$$\dim \langle v, A(v), A^2(v), \ldots \rangle$$

$$= \min k \text{ tq } \exists\, c_0, c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{K} : \overbrace{A^k(v)}^{k+1^{\text{ème}} \text{ vecteur}} = \overbrace{\sum_{i=0}^{k-1} c_i A^i(v)}^{\text{combili des } 1^{\text{e}} \text{ vecteurs}}$$

$$\Leftrightarrow A^k(v) - \sum_{i=0}^{k-1} c_i A^i(v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(A^k - \sum_{i=0}^{k-1} c_i A^i\right)}_{p(A) \text{ polynome en } A}(v) = 0$$

⊙ Propriété de $p(A)$

① $p(A)(v) = 0$ ($p(A)$ annule v)

② le coef. du + haut degré dans $p(A)$ est $= 1$, c'est à dire que $p(A)$ est monique

③ $p(A)$ est de degré k, qui est min $\forall\, p(A)$ satisfaisant ① et ②

$\Rightarrow$ Appelons $p(A)$ l'annulateur minimal

⊙ En général : $p(A) \neq p'(A)$

$\to \; p(A)\, p'(A) = p(A) \circ p'(A) = p'(A) \cdot p(A)$
car 2 polynome en le m̂ opé. A

Si $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base et $\forall i = 1, \ldots, n$: P_i est l'annulateur minimal de e_i :

Alors $\tilde{m} := p_1(A)\, p_2(A) \ldots p_n(A)$

$= \prod_{i=1}^{n} P_i(A)$ annule chaque vecteur de $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$

$\Rightarrow \tilde{m}(A)$ annule tout vecteur $v \in V$

10.1.2 Definition et propriété

Théorème $\exists$ un unique polynome $m(x) \in \mathbb{K}[x]$ tq

① $m(A)(v) = 0 \quad \forall v \in V \Leftrightarrow m(A) = 0$

② $m(x)$ est monique

③ $m(x)$ a un degré minimum (dans l'ensemble des polynomes satisfaisant ① et ②)

C'est le polynome minimal

DEMO Existence : $\tilde{m}(x) := \prod_{i=1}^{n} p_i(x)$ satisfait ① et ②.

Unicité : Si $m_1(x)$, $m_2(x)$ deux polynomes $\neq$ satisfont ①, ② et ③, alors $(m_1 - m_2)(A) = m_1(A) - m_2(A) = 0 - 0 = 0$

mais $\deg(m_1 - m_2) < \deg(m_1)$ et $\deg(m_2)$ $\lightning$ minimalité de m_1 et m_2

Lemme Tout polynome $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ tq $p(A)(v) = 0 \quad \forall v \in V$ est multiple polynomial du polynome minimal $m(x)$

DEMO ① Si $p(x) = 0$, alors $p(x) = 0 \cdot m(x)$. Donc OK

② Si $\deg p(x) \geq \deg m(x)$ on divise euclidiennement $p(x)$ par $m(x)$: $p(x) = \underbrace{q(x)}_{\text{quotient}} \cdot m(x) + \underbrace{r(x)}_{\text{reste}}$

et $\deg r(x) < \deg m(x)$

$\Rightarrow r(x) = p(x) - q(x) \cdot m(x)$

$\Rightarrow r(A) = \underbrace{p(A)}_{=0} - q(A) \cdot \underbrace{m(A)}_{=0} \Rightarrow r(A) = 0$

$\Rightarrow r(x) = 0 \Rightarrow$ division sans reste

Théorème Cayley-Hamilton : Si $p(x) = p_A(x) = \det(A - x\,\mathrm{Id})$ est le polynome caractéristique de A, alors $p(A)(v) = 0 \quad \forall v \in V$

Corollaire Le polynome caractéristique est un multiple du polynome minimal

10.1.3 Calcul du polynôme minimal

① On peut montrer $m(x) = \mathrm{ppcm}(\{p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)\})$

② Supposons que $p(x) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \dots (\lambda_k - x)^{n_k}$ Polynome caractéristique. Alors

$m(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$ pour $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ tq $m_i \leq n_i \quad \forall i$

→ Calculer m_i ?

$\mathrm{Ker}(A - \lambda_i Id) \subseteq \mathrm{Ker}(A - \lambda_i Id)^2 \subseteq \dots = V_{\lambda_i}$ sous-espace propre

→ Chaque chaîne doit se stabiliser

$m_i = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ker}(A - \lambda_i Id)^k = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i Id)^{k+1}\}$

Remarque : $m_i \geq 1$

10.2 THEOREME DE CAYLEY-HAMILTON

Théorème: Cayley-Hamilton : $\forall a \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$, si $p(x) = \det(a - xI)$ est le polynome caractéristique de a, alors $p(a) = 0$

Rappel : $a^0 = Id$ dans $p(x)$

DEMO: Voir Scylla.

- Passons sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
- Rappel : soit V un E.V. sur $\mathbb{C}$, $\dim V = n$

→ Le polynome minimal de $A \in \mathrm{End}(V)$ est l'unique polynome $m(x) = m_A(x) \in \mathbb{C}[x]$ tq

① $m(A) = 0$ (égalité d'opéli)

② m monique (coeff. du + haut deg $= 1$)

③ $\deg(m(x))$ est minimal

→ Si $p(x) = p_A(x) = \det(A - xId) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \cdots (\lambda_k - x)^{n_k}$ est le polynome caractéristique de A, alors (multiplicités algébriques des v.p. : $n_1, \dots, n_k$)

$m(x) = m_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$ où $1 \leq m_i \leq n_i$ $\forall i = 1, \dots, k$

10.3 SOUS-ESPACES PROPRES GENERALISÉS

Supposons que $m(x) = m_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ sont des valeurs propres $\neq$ et

$1 \leq m_i \leq \text{mult. alg.}(\lambda_i)$ $\forall i = 1, \dots, k$.

Def: Un sous-espace propre généralisé associé à λ_i :

$V(\lambda_i) := \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)^{m_i}$

- Remarques : $\forall i = 1, \dots, k$

① $V(\lambda_i) \supseteq V_{\lambda_i}$ car $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)^{m_i} \supseteq \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$

② $V(\lambda_i)$ est invariant : si $v \in V(\lambda_i)$, $A(v) \in V(\lambda_i)$ car :

$(A - \lambda_i I)^{m_i}[A(v)] = A[(A - \lambda_i I)^{m_i}(v)] = A[0] = 0$

Lemme Supposons que $m(x) = p(x)q(x)$, où $p(x)$ et $q(x)$ n'ont pas de facteur commun. Alors $V = \operatorname{Ker} p(A) \oplus \operatorname{Ker} q(A)$

De plus, $\operatorname{Ker} p(A) = \operatorname{Im} q(A)$

$\operatorname{Ker} q(A) = \operatorname{Im} p(A)$

DEMO ① Montrons que $\operatorname{Ker} p(A) \cap \operatorname{Ker} q(A) = 0$

Par l'absurde, supposons $\exists v \in \operatorname{Ker} p(A) \cap \operatorname{Ker} q(A)$, $v \neq 0$

Alors $p(A)(v) = 0$ et $q(A)(v) = 0$ } $p(A)$ et $q(A)$ sont multiples de l'annulateur minimal de v (de degré ≥ 1 car $v \neq 0$)

$\Rightarrow$ $p(x)$ et $q(x)$ ont un facteur commun

② Montrons que $\operatorname{Ker} p(A) + \operatorname{Ker} q(A) = V$

Comme $p(x)$ et $q(x)$ n'ont pas de facteur commun

$\Rightarrow \exists$ polynomes $\alpha(x)$ et $\beta(x) \in \mathbb{C}[x]$ tq

$\underbrace{1}_{\text{PGCD de } p \text{ et } q} = \alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x)$

Donc si on remplace x par A :

$Id = \alpha(A)p(A) + \beta(A)q(A)$. Donc $\forall v \in V$:

$Id(v) = (\alpha(A) + p(A) + \beta(A)q(A))(v)$

$\Leftrightarrow v = \underbrace{q(A)[\beta(A)(v)]}_{\in \operatorname{Ker} p(A)} + \underbrace{p(A)[\alpha(A)(v)]}_{\in \operatorname{Ker} q(A)}$

car $p(A)[q(A)(\beta(A)(v))] = \underbrace{p(A)q(A)}_{=0}(\dots)$

③ Ⓐ $\dim \operatorname{Ker} p(A) + \dim \operatorname{Ker} q(A) = n$

Ⓑ $\dim \operatorname{Ker} p(A) + \dim \operatorname{Im} p(A) = n$

Ⓒ $\dim \operatorname{Ker} q(A) + \dim \operatorname{Im} q(A) = n$

Ⓐ et Ⓑ : $\Rightarrow (n - \dim \operatorname{Im} p(A)) + \dim \operatorname{Ker} q(A) = n$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} p(A) = \dim \operatorname{Ker} q(A)$

$\hookrightarrow \operatorname{Im} p(A) \subseteq \operatorname{Ker} q(A)$ car si $v \in \operatorname{Im} p(A)$, alors

$v = p(A)(w) \Rightarrow q(A)(v) = q(A)[p(A)(w)] = [\underbrace{p(A)q(A)}_{=0}](w) = 0$

Donc $v \in \operatorname{Ker} q(A)$

$\hookrightarrow \operatorname{Im} q(A) \subseteq \operatorname{Ker} p(A)$ car [exo!!!]

Donc $\operatorname{Im} p(A) = \operatorname{Ker} q(A)$ ▨

Théorème Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont des valeurs propres $\neq$, alors

$V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k)$

DEMO $\rightarrow$ syllabus

Corollaire ∃ base F de V tq → "petit Jordan"

$$[A]_{F,F} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 \\ 0 & \boxed{A_k} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

10.4 VECTEURS PROPRES GÉNÉRALISÉS ET CHAINES DE JORDAN

Def Un vecteur v est vecteur propre généralisé de valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ et d'ordre $m \in \mathbb{N}_0$ si :

$$(A-\lambda Id)^m(v) = 0 \text{ et } (A-\lambda Id)^{m-1}(v) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow v \in Ker(A-\lambda Id)^m \setminus Ker(A-\lambda Id)^{m-1}$$

Def La chaine de Jordan engendrée par un vecteur propre généralisé v de valeur propre λ et d'ordre m est l'ensemble

$$\{v, (A-\lambda Id)(v), \dots, (A-\lambda Id)^{m-1}(v)\}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$g_m \qquad g_{m-1} \qquad g_1$$

On écrit $\underset{v}{\overset{\|}{g_m}} \xrightarrow{A-\lambda Id} g_{m-1} \longmapsto \dots \xrightarrow{A-\lambda Id} g_1 \xrightarrow{A-\lambda Id} 0$

g_1 : vecteur propre

- Observation 1 : Toute chaine de Jordan est libre :

DEMO

Supposons $g_q \xrightarrow{A-\lambda Id} g_{q-1} \xrightarrow{A-\lambda Id} \dots \mapsto g_2 \xrightarrow{A-\lambda Id} g_1 \xrightarrow{A-\lambda Id} 0$ et

$\alpha_q g_q + \alpha_{q-1} g_{q-1} + \dots + \alpha_2 g_2 + \alpha_1 g_1 = 0$ pour $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in \mathbb{C}$

Alors : en appliquant $A-\lambda Id$

$$\alpha_q \cdot \underbrace{(A-\lambda Id)(g_q)}_{g_{q-1}} + \dots + \underbrace{\alpha_1 (A-\lambda Id)(g_1)}_{0} = 0$$

En continuant, on trouve : $\alpha_q g_{q-2} + \alpha_{q-1} g_{q-3} + \dots + \alpha_3 g_1 = 0$

Appliquer $(A-\lambda Id)$ $q-1$ fois : $\alpha_q \cdot \underset{\neq 0}{g_1} = 0 \Rightarrow \alpha_q \neq 0$

En continuant, on trouve :

$$\alpha_q = \alpha_{q-1} = \dots = \alpha_1 = 0$$

- Observation 2 : Si $G = \{g_1, \dots, g_q\} \cup \{g_{q+1}, \dots, g_n\}$ une base prolongeant la chaine de Jordan $\{g_1, \dots, g_q\}$, alors

$(A-\lambda Id)(g_1) = 0 \Rightarrow A(g_1) = \lambda g_1$

$(A-\lambda Id)(g_2) = 0 \Rightarrow A(g_1) = \lambda g_2 + g_1$

$(A-\lambda Id)(g_{q-1}) = 0 \Rightarrow A(g_{q-1}) = \lambda g_q + g_{q-1}$

$$[A]_{G,G} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda \end{matrix} & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

• Observation 3 : Pour une base F, $[A]_{F,F}$ est en forme normale de Jordan $\Leftrightarrow$ F = union de chaînes de Jordan

Déf | Une base F est une base de Jordan si F est une réunion de chaînes de Jordan.

Thm | $\forall$ espace vectoriel V sur $\mathbb{C}$, de dim. finie n, $\forall$ A opéli sur V, $\exists$ base de Jordan

DEMO

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres. Vu que $V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k)$ et que chaque $V(\lambda_i)$ est invariant, il suffit de trouver une base de Jourdan dans chaque $V(\lambda_i)$ indépendamment.

Supposons $\mathrm{Spec}(A) = \{\lambda\}$ et $m_A(x) = (x-\lambda)^m$ où $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq m \leq n$

Si $m = 1$, alors $A - \lambda Id = 0 \Leftrightarrow A = \lambda Id$ ok ! toute base convient

Supposons $m \geq 2$.

$\{0\} \subsetneq \mathrm{Ker}(A-\lambda Id) \subsetneq \mathrm{Ker}(A-\lambda Id)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \underbrace{\mathrm{Ker}(A-\lambda Id)^m}_{\text{Ker } 0 = V}$

Pour $i = 1, \dots, m$, posons $d_i = \dim(\mathrm{Ker}(A-\lambda Id)^i - \mathrm{Ker}(A-\lambda Id)^{i-1})$

Montrons que $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_m$:

Dans $\mathrm{Ker}(A-\lambda Id)^m$, prenons d_m vecteurs $f_{m,1}, \dots, f_{m,d_m}$ "fortement" linéairement indépendants : aucune combili non triviale de ces vecteurs $\in \mathrm{Ker}(A-\lambda Id)^{m-1}$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix}(A-\lambda Id)(f_{m,1}) \\ \vdots \\ (A-\lambda Id)(f_{m,d_m})\end{matrix}\right\}$ sont "fortement" linéairement indépendant dans $\mathrm{Ker}(A-\lambda Id)^{m-1}$

$\Rightarrow d_{m-1} \geq d_m$

On obtient donc :

$f_{m,1} \mapsto f_{m-1,1} \mapsto \dots$

$\vdots$

$f_{m,d_m} \mapsto f_{m-1,d_m} \mapsto \dots$

$f_{m-1,d_m+1} \mapsto \dots$

On itère ce raisonnement pour tout $i = m, m-1, \dots, 1$. Il y a $d_i - d_{i+1}$ chaînes de Jordan de taille i (on pose $d_{m+1} = 0$)